BAB 3

TITIK, GARIS, DAN RELASI ANTAR GARIS

INDIKATOR PENCAPAIAN

a. Menentukan jarak titik ke garis
b. Menentukan relasi dua garis
c. Menentukan sudut antara dua garis
d. Menjelaskan keluarga garis
e. Menentukan anggota berkas garis
f. Menentukan luas daerah segitiga yang diketahui ketiga titik sudutnya

https://boingboing.net/2014/12/12/the-beauty-and-wisdom-of-mathe.html

"It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul." — Sofia Kovalevskaya, *Recollections of Childhood*, 1895

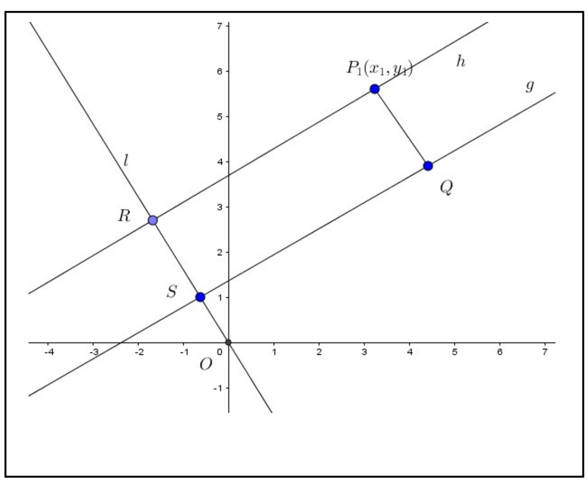
A. JARAK TITIK KE GARIS

Kedudukan sebuah titik terhadap garis kemungkinannya adalah titik terletak pada garis atau titik di luar garis. Jika titik terletak pada garis maka koordinat titik memenuhi persamaan garis, sebaliknya jika titik di luar garis maka koordinat titik tidak memenuhi persamaan garis. Jika titik terletak pada garis, maka jarak titik ke garis adalah 0. Jika titik terletak di luar garis, maka dapat ditentukan jarak titik tersebut ke garis. Berikut akan dicari jarak dari titik $P(x_1, y_1)$ ke garis $g : Ax + By + C = 0$.

Garis g ini bergradien $-\frac{A}{B}$. Akan ditentukan panjang ruas garis yang tegak lurus dari titik $P(x_1, y_1)$ ke garis ini, yaitu panjang PQ.

Dibentuk suatu garis yang sejajar dengan g dan melalui titik $P(x_1, y_1)$, namakan h. Garis ini bergradien $-\frac{A}{B}$ karena sejajar dengan g.

Selanjutnya dibentuk garis yang tegak lurus dengan h dan melalui titik asal, namakan l dengan S adalah titik potong garis dengan g. Garis ini bergradien $\frac{B}{A}$ karena tegak lurus terhadap g. Panjang ruas garis l sama dengan panjang PQ, yaitu jarak yang dicari. Karena h melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan bergradien $-\frac{A}{B}$, maka persamaannya adalah



$$y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1)$$

atau $y = \frac{-Ax + Ax_1 + By_1}{B}$.

Garis l mempunyai persamaan

$y = \frac{B}{A}x$

Garis h memotong garis l jika

$$\frac{B}{A}x = \frac{-Ax + Ax_1 + By_1}{B}$$

Dengan menyelesaikan persamaan ini diperoleh

$$x = \frac{A(Ax_1+By_1)}{A^2+B^2}.$$

Dengan mensubstitusikan $y = \frac{B}{A}x$, diperoleh koordinat titik *R* yaitu $\left(\frac{A(Ax_1+By_1)}{A^2+B^2}, \frac{B(Ax_1+By_1)}{A^2+B^2}\right)$.

Titik *S* adalah titik potong garis $y = \frac{B}{A}x$ dan *Ax* + *By* + *C* = 0 atau $y = -\frac{Ax+}{B}$. Titik *S* dapat dicari dengan menyelesaikan secara simultan kedua persamaan tersebut, yaitu

$$-\frac{Ax+}{B} = \frac{B}{A}x$$

Diperoleh $x = \frac{-AC}{A^2+B^2}$. Ordinat *y* diperoleh dengan mensubstitusikan *x,* yaitu

$$y = \frac{B}{A}x = \frac{B}{A}\left(\frac{-AC}{A^2+B^2}\right) = \frac{-BC}{A^2+B^2}.$$

Jadi $S\left(\frac{-AC}{A^2+B^2}, \frac{-BC}{A^2+B^2}\right)$. Dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik, panjang RS adalah

$$d = \sqrt{\left(\frac{-AC}{A^2+B^2} - \frac{A(Ax_1+By_1)}{A^2+B^2}\right)^2 + \left(\frac{-BC}{A^2+B^2} - \frac{B(Ax_1+By_1)}{A^2+B^2}\right)^2}$$

Dengan melakukan penyederhanaan diperoleh

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

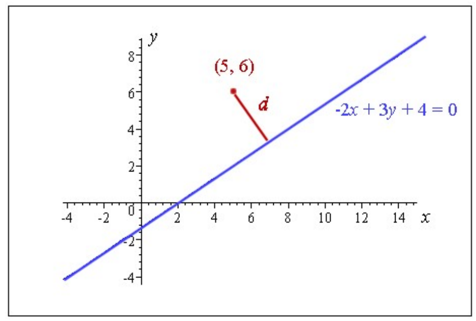
Tanda mutlak diperlukan karena jarak haruslah bernilai positif, sedangkan kombinasi dari *A,* x_1 , *B,* y_1 dan *C* dapat menghasilkan bilangan positif maupun negatif.

Jadi jarak dari titik $P(x_1, y_1)$ ke garis *Ax* + *By* + *C* = 0 diberikan oleh rumus

$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Contoh 1

a. Tentukan jarak dari titik (5, 6) ke garis -2x + 3y + 4 = 0.



Jawab

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
$$= \frac{|-2.5 + 3.6 + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}$$
$$= \frac{12}{\sqrt{13}}$$

b. Tentukan jarak titik (-3, 7) ke garis $y = \frac{6}{5}x + 2$

Jawab

Garis $y = \frac{6}{5}x + 2$ dapat dinyatakan dalam bentuk umum

6x - 5y + 10 = 0

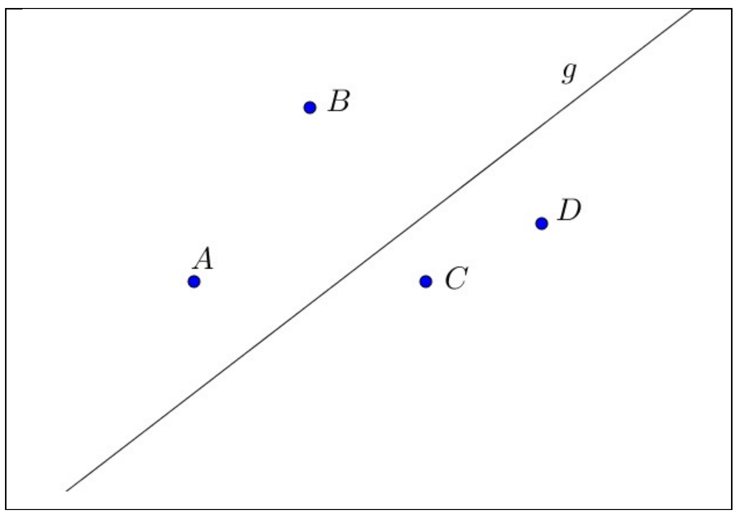
Dengan menggunakan rumus jarak, diperoleh

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|6.(-3) - 5.7 + 10|}{\sqrt{6^2 + (-5)^2}} = \frac{43}{\sqrt{61}}$$

LEMBAR AKTIVITAS

Diskusikan masalah ini. Suatu titik terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika koordinat titik tersebut memenuhi persamaan garis. Sebaliknya, titik di luar garis jika dan hanya jika tidak memenuhi persamaan garis.

Pada gambar di bawah, titik A dan titik B sepihak terhadap garis g. Begitu juga titik C dan titik D sepihak terhadap garis g. Titik A dan titik C dikatakan berlainan pihak terhadap garis g, demikian juga titik B dan C maupun titik B dan D.



Ambillah suatu garis g dan beberapa titik, baik sepihak maupun berlainan pihak terhadap garis g. Substitusikan koordinat titik-titik tersebut ke ruas kiri persamaan bentuk umum garis g. Selidikilah apa hubungan antara nilai-nilai tersebut dengan kedudukan dua titik terhadap garis g. Sifat apa yang Saudara temukan ?

Latihan 1

1. Hitunglah jarak titik (5, 6) ke garis $-2x + 3y + 4 = 0$.
2. Tentukan jarak dari titik (-3, 7) ke garis $6x-5y+2=0$.
3. Hitunglah jarak titik $P(3,-5)$, $Q(-4,1)$, dan $R(9,0)$ ke garis $12y = 5x-26$.
4. Tentukan jarak antara garis $15x-8y-51=0$ dan garis $15x-8y+68=0$.

5. Carilah contoh titik yang jaraknya ke garis g: $3x-4y=12$ sama dengan jarak titik $A(5, -1)$ ke garis g.
6. Tentukan jarak titik (x_1, y_1) ke garis $y=mx+c$.

B. RELASI DUA GARIS

Pada bidang, relasi dua garis dapat berupa berimpit, sejajar, atau berpotongan. Kasus khusus dari dua garis berpotongan adalah tegak lurus.

Garis-garis yang sejajar

Garis-garis yang memiliki kemiringan yang sama adalah garis-garis yang sejajar. Misalkan garis pertama bergradien m_1 dan garis lain bergradien m_2 , kedua garis akan sejajar jika

$$m_1 = m_2$$

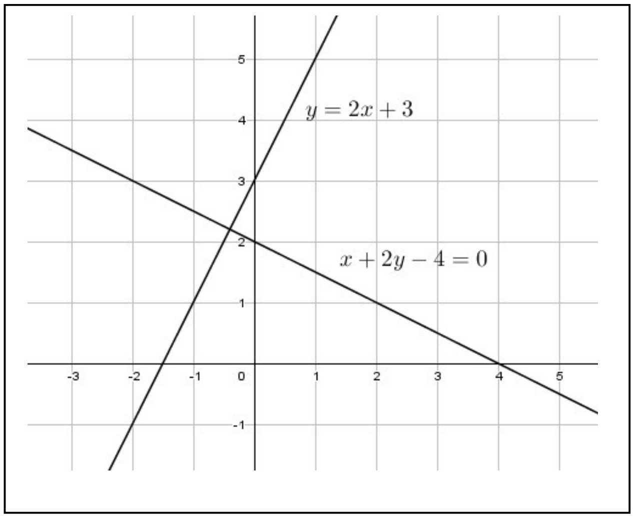
Dua garis yang tegak lurus

Misalkan garis pertama bergradien m_1 dan garis lain bergradien m_2 . Kedua garis tegak lurus, jika

$$m_1 \times m_2 = -1$$

Contoh 2

Pada gambar di bawah, gradien kedua garis adalah 2 dan -0.5. Karena $2 \times -0.5 = -1$, maka kedua garis tegak lurus.



Jika kedua garis dinyatakan dalam bentuk umum $A_1x+B_1y+C_1=0$ dan $A_2x+B_2y+C_2=0$, maka relasi kedua garis dapat ditentukan dari perbandingan konstanta-konstantanya.

a. Jika $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, maka kedua garis berpotongan

b. Jika $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, maka kedua garis sejajar

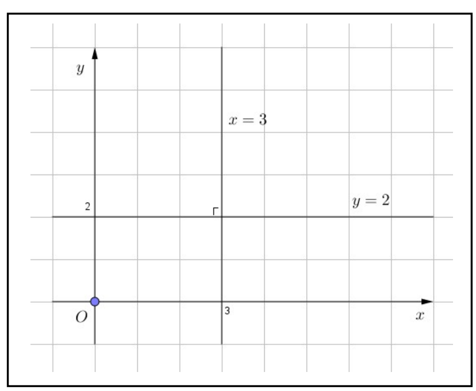
c. Jika $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, maka kedua garis berimpit

d. Jika $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2}$, dan $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, hanya mungkin terjadi ketika $A_1=A_2=0$, maka kedua garis sejajar dengan sumbu-x.

e. Jika $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, $\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, dan $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, hanya mungkin terjadi ketika $B_1=B_2=0$, maka kedua garis sejajar dengan sumbu-y.

Kasus khusus

Apa yang akan terjadi jika garis sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat? Sebagai contoh garis $y = 2$ sejajar dengan sumbu-x dan bergradien). Garis $x = 3$ sejajar dengan sumbu-y dan gradiennya



tak terdefinisi. Kedua garis ini tegak lurus, tetapi hasil kali kedua gradiennya tidak dapat ditentukan. Begitu juga jika kedua garis adalah sumbu-x dan sumbu-y.

Latihan 2

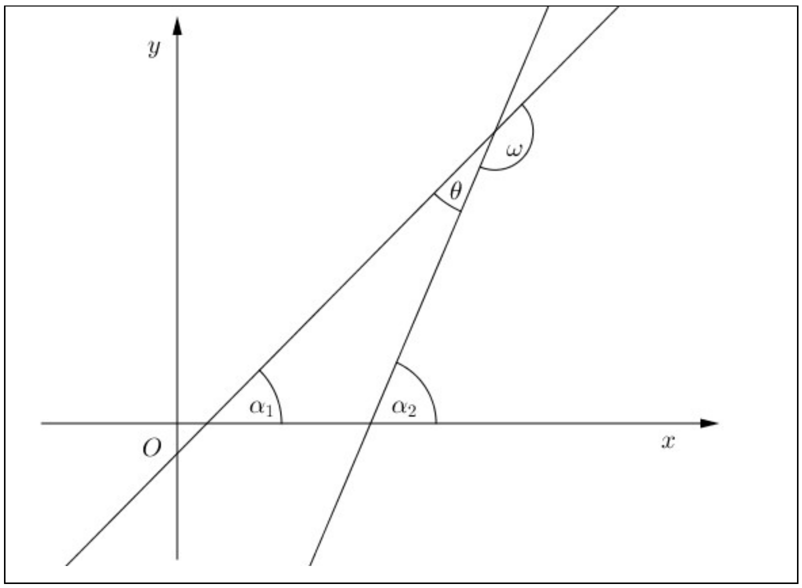
1. Tentukan persamaan garis yang tegak lurus terhadap garis yang menghubungkan titik (4, 2) dan (3, -5) dan melalui titik (4, 2).
2. Tentukan persamaan garis yang sejajar dengan garis yang menghubungkan titik (4, 2) dan (3, -5) dan melalui titik (4, 2).
3. Jika $4x - ky = 6$ dan $6x + 3y + 2 = 0$ saling tegak lurus, berapakah nilai k?
4. Suatu garis g melalui titik (-3, 9) dan (4, 4), sedangkan garis h melalui titik (9, -1) dan (4, -8). Apakah garis g dan h saling sejajar atau tegak lurus ?
5. Tentukan relasi antara kedua garis berikut.

   a. $3x - 4y - 5 = 0$ dan $3x + 4y + 8 = 0$
   b. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ dan $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$
   c. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2}$ dan $\frac{x+4}{6} = \frac{y-3}{4}$
   d. $x = 2 - t; y = -3 + 2t$ dan $x = -1 + 2t; y = 3 - 4t$
   e. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ dan $y = -\frac{2}{3}x + 6$
   f. $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2}$ dan $2x - 3y + 6 = 0$

C. SUDUT ANTARA DUA GARIS

Dua garis berpotongan membentuk empat sudut. Kedua pasang sudut besarnya sama, dan sudut dari satu pasangan merupakan pelurus dari sudut pasangan lainnya. Selanjutnya akan ditunjukkan bagaimana menentukan besar setiap sudut tersebut dengan menggunakan gradien garis. Misal diberikan garis $g_1 : y = m_1 x + b_1$ dan $g_2 : y = m_2 x + b_2$ dengan inklinasi berturut-turut α_1 dan α_2, yaitu $m_1 = \tan \alpha_1$ dan $m_1 = \tan \alpha_1$. Sudut antara g_1 dan g_2 adalah θ dan ω. Biasanya diambil kesepakatan bahwa sudut antara dua garis adalah yang sudut lancip. Perhatikan gambar di bawah. Karena sudut luar segitiga besarnya sama dengan jumlahan besar kedua sudut yang tidak bersisian dengannya, maka diperoleh

$\alpha_2 = \theta + \alpha_1$ atau $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$



Dengan menggunakan rumus tangen dari selisih dua sudut, diperoleh

$$\tan \theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \ {}_1 . \tan \alpha_2}$$

Jika $\tan \alpha_1 = m_1$ dan $\tan \alpha_2 = m_2$ maka $\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ di mana m_2 adalah gradien garis kedua, m_1 gradien garis awal, dan θ diukur berlawanan arah jarum jam. Sudut ω merupakan pelurus dari θ sehingga

$$\tan \omega = -\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Rumus untuk $\tan \omega$ sama dengan rumus untuk $\tan \theta$ dengan menukar suku pada pembilang.

Contoh 3

Sudut yang dibentuk oleh garis y = 2x+1 dan $y = -\frac{1}{2}x$ adalah sudut siku-siku karena

$$\tan\theta = \frac{2-(-\frac{1}{2})}{1+2(-\frac{1}{2})}$$ tak terdefinisi sehingga θ= 90°.

Latihan 3

1. Tentukan besar sudut yang dibentuk oleh garis 3x+y-7=0 dan y=4x+2
2. Hitunglah besar sudut antara garis 4x-3y+5=0 dan 6x+8y+17=0.
3. Tentukan persamaan garis bagi dari sudut yang dibentuk oleh garis 2y+3y=0 dan 2x+y-2=0.
4. Hitunglah besar sudut yang dibentuk oleh garis y = x+2 dengan $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$.
5. Hitunglah besar kedua sudut yang dibentuk oleh garis $3x - 8y = 7$ dan $2x + y = -2$.
6. Tunjukkan bahwa jika garis g tegak lurus dengan garis h maka $m_g \times m_h = -1$

D. KELUARGA GARIS

Persamaan garis dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk, antara lain $y = mx + b$ dan $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Setiap persamaan ini mempunyai dua konstanta yang secara geometri signifikan. Konstanta pada persamaan pertama adalah m dan b, sedangkan pada persamaan kedua adalah a dan b. Ketika nilai tertentu digantikan pada konstanta ini, akan diperoleh suatu garis tertentu. Nilai konstanta yang lain akan menentukan garis yang berbeda. Nilai konstata ini tertentu untuk suatu garis tertentu, tetapi akan berubah dari satu garis ke garis lainnya. Konstanta m dan b, dan a dan b ini dinamakan parameter.

Suatu persamaan linear dengan hanya satu parameter diperoleh jika salah satu parameter diganti dengan suatu nilai tertentu. Persamaan yang dihasilkan menyatakan semua garis dengan sifat khusus jika parameter sisanya berubah-ubah. Setiap nilai dari parameter sisanya menentukan satu garis tertentu. Kumpulan garis yang didefinisikan oleh persamaan linear dengan satu parameter disebut keluarga atau sistem garis. Sebagai contoh, jika m=3, persamaan kemiringan-titik menjadi $y = 3x + b$. Persamaan ini menyatakan keluarga garis bergradien 3. Satu garis ditentukan oleh setiap nilai b. Terdapat banyak tak hingga garis yang merupakan anggota keluarga garis ini. Setiap titik di bidang dilalui anggota keluarga garis ini.

Keluarga garis melalui titik potong dua garis (berkas garis)

Misalkan $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ merupakan dua garis yang berpotongan. Persamaan

$$(A_1x + B_1y + C_1) + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

menyatakan suatu system dari garis-garis yang melalui titik potong kedua garis pertama. Sistem garis ini sering dinamakan berkas garis dengan anggota dasar kedua garis yang diberikan tersebut. Persamaan sistem garis ini linear untuk sebarang nilai k. Koordinat titik potong diperoleh jika setiap bentuk aljabar dalam tanda kurung bernilai 0, sehingga memenuhi persamaan untuk sebarang nilai k, dengan k parameter. Persamaan ini merupakan persamaan berderajad satu dalam x dan y untuk sebarang nilai k. dengan demikian, persamaan tersebut menyatakan persamaan suatu sistem garis, yaitu semua garis dari keluarga garis yang melalui titik potong dua garis yang diberikan.

Contoh 4

Tentukan persamaan sistem garis yang melalui perpotongan $x-7y+3=0$ dan $4x+2y-5=0$. Kemudian tentukan anggota keluarga garis ini yang bergradien 3.

Jawab

Persamaan sistem garis yang melalui perpotongan x-7y+3=0 dan 4x+2y-5=0 diberikan adalah

$$(x-7y+3) + k(4x+2y-5)=0,$$

Atau $(1+4k)x + (-7+2k)y + (3-5k) = 0.$

Gradien dari setiap garis anggota sistem ini, kecuali garis vertikal, adalah $-\frac{1+4k}{2k-7}$. Dengan menyelesaikan persamaan $-\frac{1+k}{2k-7} = 3$ diperoleh k = 2. Jadi anggota sistem garis yang bergradien 3, yaitu dengan k = 2 adalah 9x - 3y – 7 = 0.

Latihan 4

1. Tulis persamaan sistem garis yang didefinisikan melalui kondisi berikut.
   a. Sejajar dengan 3x - 2y = 5
   b. Melalui titik (5, -2)
   c. Hasil kali kedua intersepnya adalah 4.
   d. Memotong sumbu-y di titik (0,-3)
   e. Mempunyai kemiringan -2
   f. Bilangan arahnya [-2, 3]
   g. Intersep-x 2
   h. Tegak lurus dengan garis y = -3x+4
2. Tulis persamaan sistem garis yang memenuhi kondisi yang diberikan. Untuk setiap kasus, pilih 3 nilai untuk parameter yang ada dan gambarkan garisnya.
   a. Sejajar dengan 7x - 4y = 3
   b. Melalui titik (-3,4)
   c. Intersep-x dua kali intersep-y.
   d. Tegak lurus terhadap 2x-5y+3=0
   e. Intersep-y -4

f. Melalui titik potong x-2y+7=0 dan 5x-7y-3=0.

3. Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong kedua garis berikut dan memenuhi kondisi yang diberikan.

a. $3x+y-2=0$, $x+5y-4=0$; melalui (5,2)

b. $5x+3y+2=0$, $x-y-5=0$; $m= -3$

c. $x-11y=0$, $3x+y-5=0$; garis vertikal

d. $6x-2y=3$, $x-5y = 4$; $m=0$

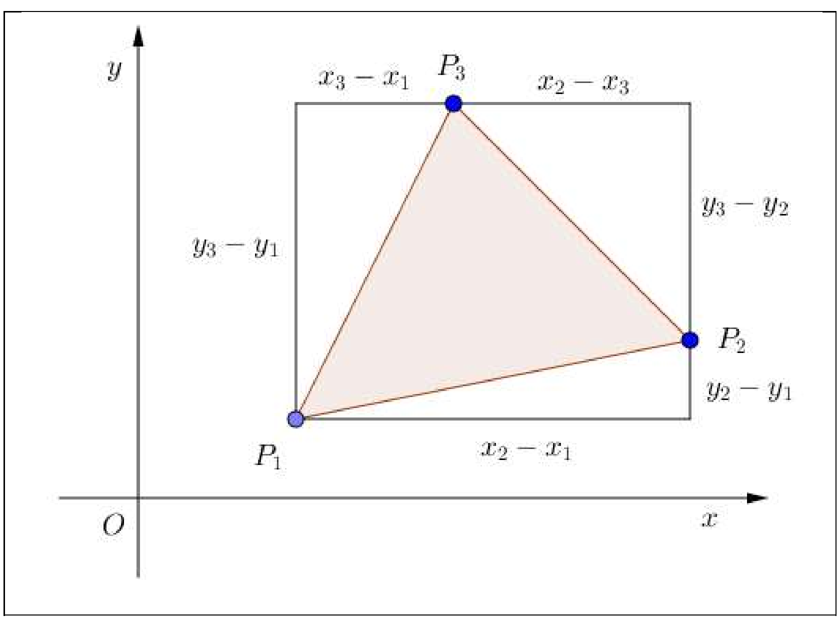
e. $3x-4y-2=0$, $3x+4y+1=0$; intersepnya sama.

f. $2x-y-5=0$, $x+y-4=0$; melalui (0,0)

4. Ketiga sisi suatu segitiga masing-masing terletak pada garis $2x-3y+4=0$, $x+y+3=0$, dan $5x-4y-20=0$. Tentukan persamaan ketiga garis tinggi segitiga tersebut.

E. LUAS DAERAH SEGITIGA

Luas daerah segitiga $P_1P_2P_3$ dapat ditentukan sebagai berikut. Buat garis-garis yang sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat dan melalui titik sudut sehingga memuat daerah segitiga dan membentuk persegi panjang.



Luas daerah persegi panjang ini dikurangi luas daerah segitiga-segitiga selain segitiga yang dimaksud sama dengan luas daerah segitiga $P_1P_2P_3$. Sehingga

$$\begin{aligned} Luas = {} & (x_3 - x_1)(y_3 - y_2) \\ & - \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 - y_2)] \\ & - \frac{1}{2}(-x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_1y_3 + x_1y_2) \end{aligned}$$

Atau dapat dituliskan dalam determinan matriks berikut:

$$Luas = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinan bernilai positif atau negatif tidaklah penting, karena dengan mengubah urutan P_1, P_2, P_3 dapat bernilai positif. Ketiga titik P_1, P_2, P_3 segaris jika dan hanya jika determinanya bernilai 0. Hal ini dapat digunakan untuk menentukan apakah ketiga titik segaris.

Contoh 5

Luas daerah segitiga *OPQ* dengan *O*(0,0), *P*(1,2), dan *Q*(3, -2) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

Jadi luas daerah segitiga *OPQ* adalah 4 satuan luas.

LEMBAR AKTIVITAS

Diskusikan

1. Bagaimana cara mengetahui apakah 3 titik segaris dengan menggunakan rumus luas segitiga di atas.
2. Nyatakan rumus luas segitiga di atas sehingga menggunakan notasi sigma.
3. Selidikilah dan carilah rumus luas daerah segi-n.

Latihan 5

1. Lukis dan hitung luas daerah segitiga yang ketiga titik sudutnya diberikan sebagai berikut.
   a. (0, 0), (0, 1), (6, 0)
   b. (0, 0), (0, 1), (6, 2)
   c. (-8, 9), (6, 1), (5, 0)
   d. (3, 2), (-1, 4), (4, -2)
2. Hitung luas daerah segi empat yang titik-titik sudutnya adalah titik-titik berikut.
   a. (1, 2), (-4, 1), (-2, -2), (6, 0)
   b. (-1, 2), (0, - 6), (4, - 2), (3, 2)
3. Selidiki apakah ketiga titik berikut segaris atau tidak segaris.
   a. (-2, -2), (4, 1), (8, 3)
   b. (-1, -2), (3, 1), (10, 3)
   c. (9, -1), (4, 2), (-1, 6)

TES FORMATIF

1. Diberikan tiga titik (x,3), (-1,2), dan (3, -5) yang segaris. Maka nilai x yang memenuhi adalah …
2. Hitunglah cosines sudut antara garis $2x-3y+12=0$ dan $x+2y-4=0$.
3. Diberikan segitiga ABC dengan $A(-2,-3)$, $B(2,0)$, dan $C(-1,2)$. Tentukan persamaan garis-garis tinggi segitiga ABC tersebut.
4. Jarak titik (4,3) ke garis $3x-4y-3=0$ adalah ….
5. Hitunglah jarak antara garis $y=2x$ dan garis $y=2x+8$.
6. Tentukan persamaan garis yang melalui titik potong garis $2x-y+2=0$ dengan garis $x+y=4$ dan bergradien ½.
7. Tentukan relasi antara garis $y=2x-1$ dan garis $x=2t$, $y=1-3t$.
8. Hitunglah luas daerah segitiga ABC dengan $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$, dan $C(2, -3)$.
9. Tentukan persamaan keluarga garis yang memiliki intersep-x 3.
10. Tentukan persamaan keluarga garis yang bergradien -2. Selanjutnya tentukan persamaan anggota keluarga tersebut yang melalui titik (-4, 2).